131

324(XD)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

StudentSuvidha.com downloaded from

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय { 1, 2, 3, 4 } में सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$R = \{(1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3, 2)\}$.

यह सम्बन्ध R

i) स्वतुल्य तथा सममित है, किन्तु संक्रामक नहीं

ii) स्वतुल्य तथा संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं

iii) सममित तथा संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य नहीं

iv) एक तुल्यता सम्बन्ध है। 1

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

ख) $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \to R$ है

i) एकैक और आच्छादक

ii) बहु-एक और आच्छादक

iii) एकैक, किन्तु आच्छादक नहीं

iv) न तो एकैक और न ही आच्छादक। 1

ग) समाकलन $\int \sin 3x \, dx$ का मान है

i) $\frac{1}{3}\cos 3x + c$

ii) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$

iii) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

iv) $-\cos 3x + c$. 1

घ) अवकल समीकरण

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + 3e^x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9y^3 = x^4$$ की घात है

i) 1 ii) 2

iii) 3 iv) 4. 1

ङ) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{k}\times\hat{i}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है

i) 0 ii) 1

iii) 2 iv) 3. 1

1. Attempt *all* the parts :

a) The relation R is defined in the set $\{1, 2, 3, 4\}$ as follows :

$R = \{(1, 2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3, 2)\}$.

This relation R is

i) reflexive and symmetric, but not transitive

ii) reflexive and transitive, but not symmetric

iii) symmetric and transitive, but not reflexive

iv) an equivalence relation. 1

b) The function $f: R \to R$, defined by $f(x) = x^2$, is

i) one-one and onto

ii) many-one and onto

iii) one-one, but not onto

iv) neither one-one nor onto. 1

downloaded from StudentSuvidha.com
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

c) The value of the integral $\int \sin 3x\,dx$ is

i) $\frac{1}{3}\cos 3x + c$

ii) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$

iii) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

iv) $-\cos 3x + c$ 1

d) The degree of the differential equation

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + 3e^x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9y^3 = x^4 \text{ is}$$

i) 1 ii) 2

iii) 3 iv) 4. 1

e) The value of

$$\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{k}\times\hat{i}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j}) \text{ is}$$

i) 0 ii) 1

iii) 2 iv) 3. 1

2. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : X \to Y$ और $g : Y \to Z$ एकैक हैं, तो $gof : X \to Z$ भी एकैक है। 1

downloaded from StudentSuvidha.com

ख) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ग) दिखाइए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर सतत है। http://www.upboardonline.com 1

घ) एक थैले में 5 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छया थैले से निकाली जाती है। निकाली गयी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

ङ) x तथा y ज्ञात कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}.$$ 1

2. Attempt *all* the parts :

a) Prove that if $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ are one-one, then $gof : X \to Z$ is also one-one. 1

b) Find the principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. 1

c) Show that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. 1

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

d) There are 5 red and 3 black balls in a bag. A ball is taken out of the bag at random. Find the probability that the ball taken out is black. 1

e) Determine x and y if

$$2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}.$$ 1

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $f(x)=8x^3$ और $g(x)=x^{1/3}$, तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। 2

ख) सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनायें हैं, E तो और F' भी स्वतंत्र होंगी। 2

ग) स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करके वक्रों के कुल $y=ae^{3x}+be^{-2x}$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

घ) x, y और z-अक्षों की दिक्-कोज्यायें ज्ञात कीजिए। 2

3. Attempt *all* the parts :

a) If $f(x)=8x^3$ and $g(x)=x^{1/3}$, find gof and fog. 2

b) Prove that if E and F are two independent events, then E and F' are also independent. 2

c) Find the differential equation representing the family of curves $y=ae^{3x}+be^{-2x}$ by eliminating the arbitrary constants a and b. 2

d) Find the direction-cosines of x, y and z-axes. 2

4. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $a*b=a+2b$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $*: R\times R\to R$ क्रम विनिमेय नहीं है। 2

ख) सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

ग) यदि $y=\sin^{-1}x$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}.$$ 2

घ) दर्शाइए कि बिन्दु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ तथा $C(c, a+b)$ संरेख हैं। 2

Downloaded from StudentSuvidha.com
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

4. Attempt *all* the parts :

a) Prove that the binary operation $* : R \times R \to R$ defined by $a * b = a + 2b$ is not commutative. 2

b) Find the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. 2

c) If $y = \sin^{-1} x$, prove that

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$$ 2

d) Show that the points $A\ (a, b + c)$, $B\ (b, c + a)$ and $C\ (c, a + b)$ are collinear. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तो सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2 + 4$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R^+ \to (4, \infty)$ व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम $f^{-1} : (4, \infty) \to R^+$ निम्नवत है :

$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$. 5

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$ 5

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x + y + z)(x - z)^2.$$ 5

घ) अवकल समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$ को हल कीजिए। 5

ङ) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

च) क्रमशः 3, 4, 5 परिमाण के तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार हैं कि इनमें से प्रत्येक शेष दो सदिशों के योगफल के लम्बवत् है, तो $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए। 5

5. Attempt any *five* parts of the following :

a) If R^+ is the set of non-negative real numbers, prove that the function $f : R^+ \to (4, \infty)$ defined by $f(x) = x^2 + 4$ is invertible and the inverse of f, $f^{-1} : (4, \infty) \to R^+$, is as follows :

$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$. 5

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

b) Prove that

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$ 5

c) Prove that

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$$ 5

d) Solve the differential equation $(x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0$. 5

e) Find the equation of the normal to the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ at the point $(1, 1)$. 5

f) Three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ of magnitudes 3, 4, 5 respectively are such that each of them is perpendicular to the sum of the rest two. Find the magnitude of $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^n=\begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$,

ख) फलन $f(x)=x^3-5x^2-3x$ के लिए अन्तराल [1, 4] में माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 5

ग) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं A (3, 4, 1) और B (5, 1, 6) को मिलाने वाली रेखा xy-समतल को काटती है। 5

घ) अवकल समीकरण $y\,dx-(x+2y^2)dy=0$ को हल कीजिए। 5

ङ) छः सिक्के उछाले जाते हैं। केवल 2 के चित (heads) आने की प्रायिकता क्या है ? 5

च) सिद्ध कीजिए कि एक दिये गये वृत्त के अन्तर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) If $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, prove that $A^n=\begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, where $n \in N$. 5

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

b) Verify mean value theorem for the function $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ in the interval [1, 4]. 5

c) Find the coordinates of the point where the line joining the points A (3, 4, 1) and B (5, 1, 6) cuts xy-plane. 5

d) Solve the differential equation $y\,dx - (x + 2y^2)dy = 0$. 5

e) 6 coins are tossed. What is the probability that only two of them show heads ? 5

f) Prove that among all the rectangles inscribed in a circle the area of square is maximum. 5

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात

ख) आव्यूह विधि से निम्नलिखित रैखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

$2x - 3y + 5z = 11$,

$3x + 2y - 4z = -5$,

$x + y - 2z = -3$. 8

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. 8

b) Solve by matrix method the following system of linear equations :

$2x - 3y + 5z = 11$,

$3x + 2y - 4z = -5$,

$x + y - 2z = -3$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$ 8

ख) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$ 8

b) Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 32$, the line $y = x$ and the x-axis. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित व्यवरोधों

$x + 2y \geq 10$

$3x + 4y \leq 24$

$x \geq 0,\ y \geq 0.$

के अन्तर्गत $Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) रेखाओं

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

और

$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

downloaded from StudentSuvidha.com

9. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the minimum value of $Z = 200x + 500y$ subject to the following constraints :

$x + 2y \geq 10$

$3x + 4y \leq 24$

$x \geq 0,\ y \geq 0.$ 8

b) Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

and

$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).$

8

324(XD)-1,25,000